Exercice 1 **7 points** **Thèmes : probabilités**

Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain.
Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.
On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :

— Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4 ;

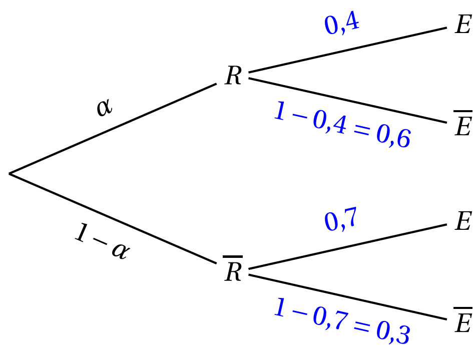
— Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7 ;

— La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
On considère les évènements suivants :

- R : « le client loue un vélo de route » ;
- E : « le client loue un vélo électrique » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$, évènements contraires de R et E.

1. On complète l'arbre proposé.



2. **a.** D'après la formule des probabilités totales :

$p(E) = p\left(R \cap E\right) + p\left(\overline{R} \cap E\right) = \alpha \times 0,4 + (1-\alpha) \times 0,7 = 0,4\alpha + 0,7 - 0,7\alpha = 0,7 - 0,3\alpha.$

b. La probabilité que le client loue un vélo électrique est $p(E) = 0,58$.

Or $p(E) = 0,7 - 0,3\alpha$. Donc $0,7 - 0,3\alpha = 0,58$ ce qui équivaut à $0,7 - 0,58 = 0,3\alpha$ ou encore $0,12 = 0,3\alpha$ soit $\alpha = 0,4$.

3. On sait que le client a loué un vélo électrique.

La probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain est :

$$p_E\left(\overline{R}\right) = \dfrac{p\left(\overline{R} \cap E\right)}{p(E)} = \dfrac{(1-0,4) \times 0,7}{0,58} = \dfrac{0,42}{0,58} \approx 0,72.$$

4. La probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique est : $p\left(\overline{R} \cap E\right) = 0,42$.

5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros. Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.

On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.

a. On a quatre possibilités.

- La location d'un vélo de route non électrique coûte 25 €.
  Cela correspond à l'évènement $R \cap \overline{E}$ de probabilité $0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$.
- La location d'un vélo de route électrique coûte $25 + 15$ soit 40 €.
  Cela correspond à l'évènement $R \cap E$ de probabilité $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.
- La location d'un vélo tout terrain non électrique coûte 35 €.
  Cela correspond à l'évènement $\overline{R} \cap \overline{E}$ de probabilité $0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$.
- La location d'un vélo tout terrain électrique coûte $35 + 15$ soit 50 €.
  Cela correspond à l'évènement $\overline{R} \cap E$ de probabilité $0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$.

On établit la loi de probabilité de X :

x_i	25	35	40	50
$p_i = p(X = x_i)$	0,24	0,18	0,16	0,42

b. L'espérance mathématique de X est :

$E(X) = \sum x_i \times p_i = 25 \times 0{,}24 + 35 \times 0{,}18 + 40 \times 0{,}16 + 50 \times 0{,}42 = 39{,}7$.

Le coût moyen d'une location est donc de 39,70 euros.

6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.

On rappelle que la probabilité de l'évènement E est : $p(E) = 0{,}58$.

a. Il s'agit d'une répétition de 30 épreuves identiques et indépendantes n'ayant que deux issues, la probabilité du succès pour une épreuve étant égale à 0,58.

Donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de succès sur 30 tirages, suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}58$.

b. La probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique est :

$p(Y = 20) = \binom{30}{20} \times 0{,}58^{20} \times (1 - 0{,}58)^{30-20} \approx 0{,}095$.

c. La probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique est :

$p(Y \geqslant 15) = 1 - p(Y \leqslant 14) \approx 1 - 0{,}14190 \approx 0{,}858$.